MỘT SỐ BÀI TOÁN
LIÊN QUAN ĐẾN CHỦ ĐỀ ĐA THỨC[1]

Nguyễn Duy Thái Sơn

(Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng)

Qua bài giảng này, ta sẽ khảo sát một số dạng toán về đa thức, thường gặp trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi THPT quốc gia hoặc trong các kỳ thi chọn đội tuyển thi Toán quốc tế. Ta cũng sẽ gặp một số dạng toán Olympic mà phát biểu của chúng có vẻ ngoài không liên quan gì đến đa thức, nhưng các kỹ thuật đa thức lại cho ta những lời giải đẹp. Và – vẫn như ở các bài giảng trước đây của tôi – điều quan trọng hơn cả mà tôi muốn truyền tải không chỉ là một lời giải (sẽ được ghi ra), đó phải là các phân tích, định hướng trước khi ta đi đến được lời giải của một bài toán…

Bài toán 1. Cho bốn số thực a, b, c, d đôi một phân biệt.

(i) Giải hệ phương trình: $$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3t = a^4 \\ x + by + b^2z + b^3t = b^4 \\ x + cy + c^2z + c^3t = c^4 \\ x + dy + d^2z + d^3t = d^4. \end{cases}$$

(ii) Giả sử $\{a; b; c; d\} \cap \{1; 2; 3; 4\} = \varnothing$. Giải hệ phương trình: $$\begin{cases} \dfrac{x}{a-1} + \dfrac{y}{a-2} + \dfrac{z}{a-3} + \dfrac{t}{a-4} = 1 \\ \dfrac{x}{b-1} + \dfrac{y}{b-2} + \dfrac{z}{b-3} + \dfrac{t}{b-4} = 1 \\ \dfrac{x}{c-1} + \dfrac{y}{c-2} + \dfrac{z}{c-3} + \dfrac{t}{c-4} = 1 \\ \dfrac{x}{d-1} + \dfrac{y}{d-2} + \dfrac{z}{d-3} + \dfrac{t}{d-4} = 1. \end{cases}$$

[1] Đây là nội dung bài giảng được tác giả trình bày tại các lớp Tập huấn Giáo viên THPT chuyên Khu vực miền Bắc (Bắc Ninh, 16-23/7), Khu vực miền Trung (Nghệ An, 23-30/7) và Khu vực miền Nam (Bình Dương, 30/7-6/8) do ‘‘Chương trình trọng điểm Quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010-2020", Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán, tổ chức năm 2017.

Lời giải. (i) Với mỗi bộ $(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4$, đặt $P(s):=s^4-ts^3-zs^2-ys-x\ (\forall s)$, ta thu được một đa thức $P\in\mathbb{R}[s]$ có $\deg P=4$ và có hệ số của s^4 (hệ số bậc cao nhất) là 1. Do a,b,c,d đôi một phân biệt, dễ thấy: $(x;y;z;t)$ là một nghiệm của hệ đã cho khi và chỉ khi $\{a;b;c;d\}$ là tập nghiệm của phương trình $P(s)=0$ (với s là ẩn số). Theo định lý nhân tử hóa đa thức, điều này tương đương với:

$$\begin{aligned}
&P(s)\equiv(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\\
\Leftrightarrow\ & s^4-ts^3-zs^2-ys-x\equiv s^4-\left(\sum_{\text{cyc}}a\right)s^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)s^2-\left(\sum_{\text{cyc}}abc\right)s+abcd\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x=-abcd\\ y=\sum\limits_{\text{cyc}}abc\\ z=-(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\ t=\sum\limits_{\text{cyc}}a.\end{cases}
\end{aligned}$$

(ii) Với mỗi bộ $(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4$, đặt

$$\begin{aligned}P(s):\equiv(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)-x(s-2)(s-3)(s-4)-y(s-1)(s-3)(s-4)-z(s-1)(s-2)(s-4)\\ -t(s-1)(s-2)(s-3),\end{aligned}$$

ta thu được một đa thức $P\in\mathbb{R}[s]$ có $\deg P=4$ và có hệ số bậc cao nhất là 1. Dễ thấy: $(x;y;z;t)$ là một nghiệm của hệ đã cho khi và chỉ khi $\{a;b;c;d\}$ là tập nghiệm của phương trình $P(s)=0;$ một cách tương đương,

$$P(s)\equiv Q(s); \tag{1}$$

trong đó, $Q(s):\equiv(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$. Ta cũng thấy: $Q\in\mathbb{R}[s]$ có $\deg Q=4$ và có hệ số bậc cao nhất là 1. Suy ra: $\deg(P-Q)<4$. Vậy, $P-Q$ là đa thức không khi và chỉ khi $P-Q$ triệt tiêu tại 4 điểm đôi một phân biệt:

$$(1)\Leftrightarrow P(1)-Q(1)=P(2)-Q(2)=P(3)-Q(3)=P(4)-Q(4)=0. \tag{2}$$

Nhưng

$$\begin{aligned}P(1)=-x(1-2)(1-3)(1-4)=6x,\ P(2)=-y(2-1)(2-3)(2-4)=-2y,\\ P(3)=-z(3-1)(3-2)(3-4)=2z,\ P(4)=-t(4-1)(4-2)(4-3)=-6t,\end{aligned}$$

nên

$$(2) \Leftrightarrow x = Q(1)/6,\ y = -Q(2)/2,\ z = Q(3)/2,\ t = -Q(4)/6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)/6 \\ y = -(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)/2 \\ z = (a-3)(b-3)(c-3)(d-3)/2 \\ t = -(a-4)(b-4)(c-4)(d-4)/6. \end{cases}$$

<u>Bài toán 2</u>. Cho 2016 số thực $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2016}$ thỏa hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{c_1}{2\cdot 3} + \dfrac{c_2}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{c_{2016}}{2017\cdot 2018} = \dfrac{1}{1\cdot 3} \\ \dfrac{c_1}{3\cdot 4} + \dfrac{c_2}{4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{c_{2016}}{2018\cdot 2019} = \dfrac{1}{3\cdot 5} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{c_1}{2017\cdot 2018} + \dfrac{c_2}{2018\cdot 2019} + \cdots + \dfrac{c_{2016}}{4032\cdot 4033} = \dfrac{1}{4031\cdot 4033}. \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị của tổng: $S = \dfrac{c_1}{1\cdot 2} + \dfrac{c_2}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{c_{2016}}{2016\cdot 2017}$.

Lời giải. Xét đa thức $Q \in \mathbb{R}[x]$ $(\deg Q = 2017)$ và phân thức $f \in \mathbb{R}(x)$ được cho bởi:

$$Q(x) :\equiv \prod_{i=1}^{2017}(x+i),\ \ f(x) :\equiv \sum_{i=1}^{2016} \frac{c_i}{(x+i)(x+i+1)}.$$

Dễ thấy: tồn tại đa thức $P \in \mathbb{R}[x]$ có $\deg P \le 2015$ để $f(x) \equiv \dfrac{P(x)}{Q(x)}\cdot$ Theo hệ phương trình trong đề bài, với mỗi số nguyên j mà $1 \le j \le 2016,$ ta đều có:

$$f(j) = \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} \Leftrightarrow (4j^2-1)P(j) - Q(j) = 0.$$

Đặt $R(x) :\equiv (4x^2-1)P(x) - Q(x),$ ta thu được đa thức $R \in \mathbb{R}[x]$ có $\deg R \le 2017$ và thỏa: $R(j) = 0$ với mọi số nguyên j mà $1 \le j \le 2016$. Vậy, theo định lý nhân tử hóa đa thức, tồn tại các hằng số thực $\sim$,   sao cho

$$R(x) \equiv (\sim x + \quad)\prod_{j=1}^{2016}(x-j) \Leftrightarrow (4x^2-1)P(x) - Q(x) \equiv (\sim x + \quad)\prod_{j=1}^{2016}(x-j). \qquad (1)$$

Trong (1), chọn $x := 1/2$ ta suy ra

$$\frac{1}{2}\sim + \quad = -\frac{Q(1/2)}{\prod_{j=1}^{2016}\left(\frac{1}{2}-j\right)} = -\frac{\prod_{i=1}^{2017}\left(\frac{1}{2}+i\right)}{\prod_{j=1}^{2016}\left(-\frac{1}{2}+j\right)}(-1)^{2016} = -\frac{\left(\frac{1}{2}+2016\right)\left(\frac{1}{2}+2017\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sim + 2 \quad = -4033\cdot 4035. \qquad (2)$$

Còn với $x := -1/2$ thì (1) kéo theo:

$$-\frac{1}{2}\sim + \quad = -\frac{Q(-1/2)}{\prod_{j=1}^{2016}\left(-\frac{1}{2}-j\right)} = -\frac{\prod_{i=1}^{2017}\left(-\frac{1}{2}+i\right)}{\prod_{j=1}^{2016}\left(\frac{1}{2}+j\right)}(-1)^{2016} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sim + 2 \quad = -1. \tag{3}$$

Giải (2)-(3) ta tìm được $\begin{cases} \sim \ = 1 - 2\cdot 2017^2 \\ \quad = -2017^2. \end{cases}$

Cuối cùng, trong (1) chọn $x := 0,$ ta có :

$$-P(0) - Q(0) = \quad \prod_{j=1}^{2016}(-j) = -2017^2 \cdot 2016! \cdot (-1)^{2016} = -2016! \cdot 2017^2$$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{P(0)}{Q(0)} = -1 + \frac{2016! \cdot 2017^2}{Q(0)} = -1 + \frac{2016! \cdot 2017^2}{2017!}$$

$$\Rightarrow S = \sum_{i=1}^{2016} \frac{c_i}{i(i+1)} = f(0) = -1 + 2017 = 2016.$$

<u>Bài toán 3</u> (Romania). Với mỗi cặp số nguyên *m*, *n* mà $1 \le m \le n,$ đặt $R_n^m := \sum_{k=0}^{m}(m-k)^n(-1)^k \mathrm{C}_{n+1}^k.$

Với các số nguyên *m*, *n* như thế, chứng minh rằng $R_n^{n-m+1} = R_n^m.$

Lời giải. Trước tiên, để ý: $1 \le m \le n \Rightarrow 1 \le n-m+1 \le n.$ Từ đó, theo định nghĩa,

$$\begin{aligned} R_n^{n-m+1} &= \sum_{k=0}^{n-m+1}(n-m+1-k)^n(-1)^k \mathrm{C}_{n+1}^k = \sum_{k=0}^{n-m+1}\big((n+1-k)-m\big)^n(-1)^k \mathrm{C}_{n+1}^{n+1-k} \\ &= \sum_{i=m}^{n+1}(i-m)^n(-1)^{n+1-i}\mathrm{C}_{n+1}^i \ \text{ (thay } i := n+1-k \Rightarrow k = n+1-i) \\ &= \sum_{i=m}^{n+1}(m-i)^n(-1)^n(-1)^{n+1-i}\mathrm{C}_{n+1}^i \\ &= -\sum_{k=m}^{n+1}(m-k)^n(-1)^k \mathrm{C}_{n+1}^k \ \text{ (thay } k := i). \end{aligned}$$

So sánh với công thức xác định của $R_n^m,$ và chú ý rằng $(m-k)^n(-1)^k \mathrm{C}_{n+1}^k = 0$ khi $k = m,$ ta thấy $R_n^{n-m+1} = R_n^m$ khi và chỉ khi

$$\sum_{k=0}^{n+1}(m-k)^n(-1)^k \mathrm{C}_{n+1}^k = 0. \tag{1}$$

Để chứng minh (1), ta sẽ sử dụng *công thức nội suy Lagrange*: Cho $P \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P \le n$, và cho $n+1$ số thực $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ đôi một phân biệt. Với mọi số nguyên $1 \le k \le n+1$ và với mọi số thực x, đặt

$$\mu_k(x) := \frac{\prod_{i\ne k}(x-x_i)}{\prod_{i\ne k}(x_k-x_i)}$$

(trong các tích ở trên, i chạy từ 1 đến $n+1$ và khác k). Khi đó ta có đồng nhất thức

$$P(x) \equiv \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k)\mu_k(x). \tag{2}$$

Chứng minh: Với mọi số nguyên $1 \le k \le n+1, 1 \le j \le n+1,$ dễ thấy

$$\mu_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{khi } j = k \\ 0 & \text{khi } j \ne k. \end{cases}$$

Từ đó, hai vế của (2) bằng nhau tại $n+1$ điểm $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Cả hai vế đều là các đa thức (của biến số x) có bậc không vượt quá n, nên chúng phải trùng nhau.

Trở lại bài toán, xét đa thức $P(x) :\equiv (m-x)^n$ và các điểm $x_j := j$ $(1 \le j \le n+1)$. Sử dụng (2) ta có:

$$P(0) - \sum_{k=1}^{n+1} P(k)\mu_k(0) = 0. \tag{3}$$

Nhưng

$$\mu_k(0) = \frac{\prod_{i\ne k}(-i)\times k}{\prod_{i\ne k}(k-i)\times k} = (-1)^n \frac{(n+1)!}{\prod_{i>k}(k-i)\times\prod_{i>k}(k-i)\times k} = \frac{(n+1)!(-1)^n}{(n+1-k)!(-1)^{n-k+1}\times k!} = -(-1)^k \mathrm{C}_{n+1}^k$$

nên $(3) \Rightarrow (1)$.

<u>**Bài toán 4**</u> (P48, Tạp chí Pi). Tìm tất cả các số nguyên $n \ge 2$ và tất cả các bộ n số nguyên

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

sao cho đa thức

$$S(x) = (x-a_1)\times(x-a_2)\times\cdots\times(x-a_n) - 3$$

phân tích được thành tích của hai đa thức khác hằng, với hệ số nguyên.

Lời giải. Giả sử $n \geq 2$ và $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ là các số nguyên sao cho ta có phân tích

$$S(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i) - 3 \equiv G(x) \cdot H(x); \tag{1}$$

trong đó, $G(x)$ và $H(x)$ là hai đa thức khác hằng, với hệ số nguyên, mà không mất tính tổng quát, ta cũng có thể giả sử $\deg G \geq \deg H$. Rõ ràng, hệ số bậc cao nhất của $G(x)$ và $H(x)$ phải cùng bằng $1,$ hoặc cùng bằng $-1.$ Nếu cần, sẽ đổi dấu cả $G(x)$ và $H(x),$ ta có thể xem hệ số đó bằng 1.

Từ nay về sau, để cho tiện, ta quy ước:

– mỗi số nguyên $i,$ mà $1 \leq i \leq n,$ sẽ được gọi tắt là một *chỉ số*;

– số phần tử của mỗi tập hợp hữu hạn X sẽ được ký hiệu bởi $|X|.$

Lần lượt xét các trường hợp:

1. Trường hợp $n \geq 4.$

Lúc này, nếu $\deg H = 1,$ tức là $H(x) \equiv x - a$ với $a \in \mathbb{Z}$ nào đó, thì theo (1), $\prod_{i=1}^{n}(a - a_i) = 3.$ Điều này là vô lý, vì 3 không thể biểu diễn được thành tích của nhiều hơn ba số nguyên đôi một phân biệt. Vì vậy,

$$n - 2 \geq \deg G \geq \deg H \geq 2. \tag{2}$$

Đặt $R(x) :\equiv G(x) + H(x).$ Ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 1: $R(x)$ là một đa thức khác hằng, với hệ số nguyên, và $\deg R \leq n - 2.$

Chứng minh: Giả sử phản chứng rằng $R(x) \equiv c$ là một đa thức hằng. Khi đó, (1) được viết lại thành

$$\prod_{i=1}^{n}(x - a_i) - 3 \equiv cG(x) - \left(G(x)\right)^2.$$

Trong đồng nhất thức trên, hệ số bậc cao nhất của đa thức ở vế trái là $1,$ của đa thức ở vế phải là $-1;$ và ta gặp mâu thuẫn. Vậy, $R(x)$ không thể là đa thức hằng. Các kết luận còn lại của Nhận xét 1 là hiển nhiên.

Nhận xét 2: $R(a_i) \in \{-2; 2\}$ với mỗi chỉ số $i.$

Chứng minh: Do (1) ta thấy

$$G(a_i)\cdot H(a_i) = -3 \Rightarrow \big(G(a_i);H(a_i)\big)\in\big\{(-3;1),(3;-1),(1;-3),(-1;3)\big\}$$
$$\Rightarrow R(a_i)=\pm 2$$

với mọi chỉ số i.

Nhận xét 3: Với mọi bộ ba chỉ số i, j, k mà $i \neq j$ và $R(a_i)=R(a_j)\neq R(a_k),$ ta có

$$(a_k-a_i)(a_k-a_j)\mid 4.$$

Chứng minh: Đặt $c=R(a_k).$ Theo Nhận xét 2, $c\in\{-2;2\}$ và $R(a_i)=R(a_j)=-c.$ Áp dụng định lý Bezout (và Nhận xét 1), ta có phân tích $R(x)+c\equiv(x-a_i)(x-a_j)P(x),$ trong đó $P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Lấy $x=a_k$ ta suy ra

$$(a_k-a_i)(a_k-a_j)\,\Big|\,\,|R(a_k)+c|=2|c|=4.$$

Nhận xét 4: $(a_i-a_j)\mid 4$ với mọi cặp chỉ số i, j mà $R(a_i)\neq R(a_j).$

Chứng minh: Đặt $c=R(a_i).$ Theo Nhận xét 2, $c\in\{-2;2\}$ và $R(a_j)=-c.$ Áp dụng định lý Bezout (và Nhận xét 1), ta có phân tích $R(x)+c\equiv(x-a_j)P(x),$ trong đó $P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Lấy $x=a_i$ ta suy ra

$$(a_i-a_j)\,\Big|\,\,|R(a_i)+c|=2|c|=4.$$

Dùng các nhận xét trên ta có thể loại đi hai trường hợp "con": $n\geq 6,$ $n=5.$

1a/ Thật vậy, giả sử $n\geq 6.$ Vì $a_1<a_2<\cdots<a_n,$ với mọi chỉ số $i\geq 6,$ ta có $a_i-a_1>4.$ Vậy, theo Nhận xét 4, ta phải có

$$R(a_i)=R(a_1) \text{ với mọi chỉ số } i\geq 6. \tag{3}$$

Đặc biệt, $R(a_6)=R(a_1).$ Mà $\left|(a_4-a_6)(a_4-a_1)\right|\geq 2\times 3>4,$ nên theo Nhận xét 3 ta phải có $R(a_6)=R(a_1)=R(a_4).$ Theo cách hoàn toàn tương tự, do $\left|(a_2-a_6)(a_2-a_4)\right|\geq 4\times 2>4$ và do $(a_5-a_1)(a_5-a_2)\geq 4\times 3>4$ nên Nhận xét 3 cho ta:

$$R(a_1)=R(a_6)=R(a_4)=R(a_2)=R(a_5). \tag{4}$$

Đặt $c=R(a_1),$ từ (3) và (4) ta thấy phương trình $R(x)-c=0$ có nhiều hơn $n-2$ nghiệm; đó là các nghiệm $x=a_i$ với mỗi chỉ số $i\neq 3.$ Điều này mâu thuẫn với Nhận xét 1. Vậy, 1a/ không thể xảy ra.

Tiếp theo, gọi I là tập hợp tất cả các chỉ số i mà $R(a_i)=2,$ và J là tập hợp tất cả các chỉ số i mà $R(a_i)=-2.$ Theo Nhận xét 2, hiển nhiên ta có

$$|I|+|J|=n. \tag{5}$$

1b/ Bây giờ giả sử $n=5.$ Lúc này từ (1) và (2) dễ thấy $\deg G=3, \deg H=2.$ Suy ra: $R(x)-2$ và $R(x)+2$ đều là các đa thức bậc ba có hệ số bậc cao nhất bằng 1. Như là một hệ quả, ta có $|I|\le 3, |J|\le 3.$ Kết hợp với (5) ta thấy chỉ có hai khả năng:

(b1) $|I|=3$ và $|J|=2$

(b2) $|I|=2$ và $|J|=3.$

Xét (b1). Giả sử $I=\{i_1<i_2<i_3\}.$ Theo định lý Bezout, ta có phân tích

$$R(x)-2\equiv (x-a_{i_1})(x-a_{i_2})(x-a_{i_3}). \tag{6}$$

Nếu $1\in J,$ thì từ (6) suy ra $4=|R(a_1)-2|=|(a_1-a_{i_1})(a_1-a_{i_2})(a_1-a_{i_3})|;$ nhưng điều này là *không thể*, vì

$$-1\ge a_1-a_{i_1}>a_1-a_{i_2}>a_1-a_{i_3}\Rightarrow |(a_1-a_{i_1})(a_1-a_{i_2})(a_1-a_{i_3})|\ge 1\times 2\times 3=6.$$

Vậy, $1\in I,$ tức là $i_1=1.$ Lập luận tương tự, ta có $5\in I,$ tức là $i_3=5.$ Chỉ còn phải khảo sát ba giá trị có thể của $i_2.$

(b1.1) Nếu $i_2=2,$ thì $4\in J$ nên từ (6) suy ra

$$4=|R(a_4)-2|=|(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_5)|\ge 3\times 2\times 1=6,$$

vô lý!

(b1.2) Nếu $i_2=3,$ thì $2\in J$ nên từ (6) suy ra

$$-4=R(a_2)-2=(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_5)>0,$$

vô lý!

(b1.3) Nếu $i_2=4,$ thì $3\in J$ nên từ (6) suy ra

$$-4=R(a_3)-2=(a_3-a_1)(a_3-a_4)(a_3-a_5)>0,$$

cũng vô lý!

Tất cả các mâu thuẫn gặp được cho thấy khả năng (b1) không thể xảy ra.

Ta có thể lặp lại phương pháp trên để thấy (b2) cũng không thể xảy ra. Một phương pháp khác là quy (b2) về (b1) bằng cách thay dãy $a_1 < a_2 < \cdots < a_5$ bởi dãy

$$b_1 = -a_5 < b_2 = -a_4 < \cdots < b_5 = -a_1,$$

và thay đa thức $R(x)$ bởi đa thức $T(x) = -R(-x)$. Chú ý rằng: $T(x) - 2$ và $T(x) + 2$ cũng là các đa thức bậc ba với hệ số nguyên và có hệ số bậc cao nhất bằng 1; ngoài ra,

$$R(a_i) = 2 \Leftrightarrow T(b_{6-i}) = -2;\ R(a_i) = -2 \Leftrightarrow T(b_{6-i}) = 2$$

nên vai trò của các tập $I,\ J$ đã được hoán đổi qua cách thay nói trên.

Tóm lại 1b/ cũng đã được loại trừ, và ta chỉ còn phải xét trường hợp "con":

1c/ $n = 4.$ Lúc này, từ (1) và (2) dễ thấy $\deg G = \deg H = 2.$ Suy ra: $R(x) - 2$ và $R(x) + 2$ đều là các đa thức bậc hai có hệ số bậc cao nhất bằng 2. Kết hợp với (5), ta thấy $|I| = |J| = 2.$ Lần này, với mọi cặp chỉ số i, j mà $R(a_i) \neq R(a_j),$ dùng chính phương pháp chứng minh Nhận xét 4 ta có $2(a_i - a_j) \mid |R(a_i) - R(a_j)| = 4$ nên $(a_i - a_j) \mid 2.$ Từ đây, vì $a_4 - a_1 > 2,$ ta suy ra $R(a_4) = R(a_1).$

Nếu $\{1;4\} = J,$ thì $R(x) + 2 \equiv 2(x - a_1)(x - a_4)$ và $\{2;3\} = I,$ nên

$$4 = R(a_2) + 2 = 2(a_2 - a_1)(a_2 - a_4) < 0,$$

vô lý! Vậy, $\{1;4\} = I,$ nên $R(x) - 2 \equiv 2(x - a_1)(x - a_4),$ $\{2;3\} = J$ và

$$-4 = R(a_2) - 2 = 2(a_2 - a_1)(a_2 - a_4) \ \Rightarrow\ a_2 - a_1 = 1,\ a_4 - a_2 = 2;$$

$$-4 = R(a_3) - 2 = 2(a_3 - a_1)(a_3 - a_4) \ \Rightarrow\ a_3 - a_1 = 2,\ a_4 - a_3 = 1.$$

Suy ra: $a_1, a_2, a_3, a_4,$ theo thứ tự đó, là bốn số nguyên liên tiếp.

Thử lại: khi $n = 4,$ với $a_1, a_2, a_3, a_4,$ theo thứ tự đó, là bốn số nguyên liên tiếp, ta có phân tích

$$\begin{aligned} S(x) &= (x - a_1)(x - a_1 - 1)(x - a_1 - 2)(x - a_1 - 3) - 3 \\ &\equiv [(x - a_1)(x - a_1 - 3) - 1][(x - a_1)(x - a_1 - 3) + 3] \end{aligned}$$

thỏa mãn yêu cầu đề ra.

2. Trường hợp $n = 3.$

Lúc này, $\deg G = 2, \deg H = 1$. Suy ra: $H(x) \equiv x - a \quad (a \in \mathbb{Z})$. Theo (1), $\prod_{i=1}^{3}(a - a_i) = 3$. Nhưng $a - a_1 > a - a_2 > a - a_3$ nên chỉ có một khả năng: $a - a_1 = 1, a - a_2 = -1, a - a_3 = -3$; tức là, các số nguyên a_1, a_2, a_3 lập thành một cấp số cộng với công sai 2.

Thử lại: khi $n = 3$, với a_1, a_2, a_3 là các số nguyên, theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng với công sai 2, ta có phân tích

$$\begin{aligned} S(x) &= (x - a_1)(x - a_1 - 2)(x - a_1 - 4) - 3 \\ &\equiv (x - a_1 - 1)[(x - a_1)^2 - 5(x - a_1) + 3] \end{aligned}$$

thỏa mãn yêu cầu đề ra.

3. Trường hợp $n = 2$.

Lúc này, $\deg G = \deg H = 1$. Suy ra: $H(x) \equiv x - a$, với $a \in \mathbb{Z}$ nào đó. Theo (1), $\prod_{i=1}^{2}(a - a_i) = 3$. Nhưng $a - a_1 > a - a_2$ nên chỉ có hai khả năng: $a - a_1 = 3, a - a_2 = 1$; hoặc $a - a_1 = -1, a - a_2 = -3$. Vậy, $a_2 = a_1 + 2$.

Thử lại: khi $n = 2$, với $a_2 = a_1 + 2 \ (a_1 \in \mathbb{Z})$, ta có phân tích

$$S(x) = (x - a_1)(x - a_1 - 2) - 3 \equiv (x - a_1 + 1)(x - a_1 - 3)$$

thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Kết luận: Tất cả các số nguyên $n \geq 2$ và tất cả các bộ n số nguyên $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ thỏa mãn yêu cầu đề ra gồm:

1. $n = 4$; a_1, a_2, a_3, a_4, theo thứ tự đó, là bốn số nguyên liên tiếp;

2. $n = 3$; các số nguyên a_1, a_2, a_3, theo thứ tự đó, lập thành một cấp số cộng với công sai 2;

3. $n = 2$; a_1, a_2 là các số nguyên mà $a_2 = a_1 + 2$.

<u>Bài toán 5</u> (Nga). Cho $f(x) = x^2 + bx + c$ là một tam thức bậc hai với các hệ số $b, c \in \mathbb{R}$. Giả sử phương trình $f\left(f(x)\right) = 0$ có đủ 4 nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt), được ký hiệu bởi x_1, x_2, x_3, x_4. Biết $x_1 + x_2 = -1$, chứng minh rằng $c \leq -1/4$.

Lời giải. Nếu phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thực thì: với mọi $x \in \mathbb{R}$, đặt $t := f(x) \ (\in \mathbb{R})$, ta thấy $f(t) \neq 0$; vậy, phương trình $f\left(f(x)\right) = 0$ không có nghiệm thực, mâu thuẫn với giả thiết!

Do đó, phương trình $f(x)=0$ phải có nghiệm thực. Giả sử $\{t_1; t_2\}$ là tập nghiệm của nó. Theo định lý Viète,

$$t_1+t_2=-b. \tag{1}$$

Ngoài ra, $f(x)\equiv(x-t_1)(x-t_2)$, nên

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\equiv f\left(f(x)\right)\equiv(f(x)-t_1)(f(x)-t_2)\equiv(x^2+bx+c-t_1)(x^2+bx+c-t_2).$$

Từ đó, chỉ có 4 khả năng sau có thể xảy ra:

1. $(x-x_1)\,|\,(x^2+bx+c-t_1)=f(x)-t_1$ và $(x-x_2)\,|\,(x^2+bx+c-t_2)=f(x)-t_2$

2. $(x-x_1)\,|\,(x^2+bx+c-t_2)=f(x)-t_2$ và $(x-x_2)\,|\,(x^2+bx+c-t_1)=f(x)-t_1$

3. $(x-x_1)(x-x_2)\equiv x^2+bx+c-t_1$ và $(x-x_3)(x-x_4)\equiv x^2+bx+c-t_2$

4. $(x-x_1)(x-x_2)\equiv x^2+bx+c-t_2$ và $(x-x_3)(x-x_4)\equiv x^2+bx+c-t_1$.

Xét hai khả năng đầu. Lúc này

$$\begin{aligned}&x_1^2+x_2^2+b(x_1+x_2)+2c=f(x_1)+f(x_2)=t_1+t_2\\ &\overset{(1)}{\Rightarrow} x_1^2+x_2^2-b+2c=-b\\ &\Rightarrow c=-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\le-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=-1/4.\end{aligned}$$

Xét hai khả năng cuối. Lúc này (cân bằng hệ số bậc nhất hoặc dùng định lý Viète), ta có

$$-1=x_1+x_2=-b\Rightarrow b=1. \tag{2}$$

Hơn nữa, phương trình $f(x)-t_i=x^2+bx+c-t_i=0$ có biệt thức $\Delta_i=b^2-4(c-t_i)\ge 0$ với mỗi $i\in\{1;\,2\}$. Vì vậy,

$$\begin{aligned}&2b^2-8c+4(t_1+t_2)=\Delta_1+\Delta_2\ge 0\\ &\Rightarrow c\le\frac{b^2+2(t_1+t_2)}{4}\overset{(1)}{=}\frac{b^2-2b}{4}\overset{(2)}{=}-1/4.\end{aligned}$$

<u>Bài toán 6</u> (Saudi Arabia TST 2016). Tìm số tự nhiên $n\ge 2$ lớn nhất có tính chất: tồn tại n tam thức bậc hai $f_1(x)=x^2+b_1x+c_1$, $f_2(x)=x^2+b_2x+c_2$, …, $f_n(x)=x^2+b_nx+c_n$ đôi một không trùng nhau, với các hệ số $b_i, c_i\in\mathbb{R}$ $(1\le i\le n)$, sao cho, với mọi cặp chỉ số $1\le i<j\le n$, phương trình $f_i(x)+f_j(x)=0$ có và chỉ có một nghiệm thực.

Lời giải. Kiểm tra trực tiếp ta thấy 3 tam thức bậc hai $f_1(x) :\equiv x^2-4,$ $f_2(x) :\equiv x^2-4x+6,$ $f_3(x) :\equiv x^2-8x+12$ thỏa hệ

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)\equiv 2(x-1)^2 \\ f_1(x)+f_3(x)\equiv 2(x-2)^2 \\ f_2(x)+f_3(x)\equiv 2(x-3)^2. \end{cases}$$

Từ đó, $n=3$ có tính chất của đề bài.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $n=3$ là số tự nhiên lớn nhất cần tìm. Giả sử phản chứng rằng tồn tại số tự nhiên $n\geq 4$ có tính chất của đề bài. Ta sẽ đi đến mâu thuẫn bằng một trong các cách sau:

Cách 1: Từ giả thiết dễ dàng suy ra: với mọi cặp chỉ số $1\leq i<j\leq n,$ tồn tại số thực t_{ij} sao cho $f_i(x)+f_j(x)=2x^2+(b_i+b_j)x+c_i+c_j\equiv 2(x-t_{ij})^2;$ vì thế, $b_i+b_j=-4t_{ij}$ và $c_i+c_j=2t_{ij}^2.$ Giải hệ

$$\begin{cases} b_1+b_2=-4t_{12} \\ b_1+b_3=-4t_{13} \\ b_2+b_3=-4t_{23} \end{cases}$$

ta tìm ra

$$\begin{cases} b_1=-2(t_{12}+t_{13}-t_{23}) \\ b_2=-2(t_{12}-t_{13}+t_{23}) \\ b_3=-2(-t_{12}+t_{13}+t_{23}). \end{cases}$$

Từ đó, $-4t_{14}+2(t_{12}+t_{13}-t_{23})=b_4=-4t_{24}+2(t_{12}-t_{13}+t_{23}),$ và vì vậy,

$$t_{13}+t_{24}=t_{14}+t_{23}. \qquad (1)$$

Tương tự, ta giải: $\begin{cases} c_1+c_2=2t_{12}^2 \\ c_1+c_3=2t_{13}^2 \\ c_2+c_3=2t_{23}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=t_{12}^2+t_{13}^2-t_{23}^2 \\ c_2=t_{12}^2-t_{13}^2+t_{23}^2 \\ c_3=-t_{12}^2+t_{13}^2+t_{23}^2 \end{cases}$ và suy ra:

$$2t_{14}^2-(t_{12}^2+t_{13}^2-t_{23}^2)=c_4=2t_{24}^2-(t_{12}^2-t_{13}^2+t_{23}^2)\Rightarrow t_{14}^2+t_{23}^2=t_{13}^2+t_{24}^2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), dễ thấy $t_{13}t_{24}=t_{14}t_{23}.$ Đặt $S:=t_{13}+t_{24}=t_{14}+t_{23}$ và $P:=t_{13}t_{24}=t_{14}t_{23},$ ta có

$$\{t_{13};\, t_{24}\}=\{t_{14};\, t_{23}\}$$

vì cả hai vế cùng là tập nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - Sx + P = 0.$ Vậy, $t_{13} = t_{14}$ hoặc $t_{13} = t_{23}$. Nếu $t_{13} = t_{14}$ thì $f_1(x) + f_3(x) \equiv f_1(x) + f_4(x) \Rightarrow f_3(x) \equiv f_4(x),$ mâu thuẫn với giả thiết! Còn nếu $t_{13} = t_{23}$ thì $f_1(x) + f_3(x) \equiv f_2(x) + f_3(x) \Rightarrow f_1(x) \equiv f_2(x),$ cũng mâu thuẫn!

Cách 2: Với mọi cặp chỉ số $1 \le i < j \le n,$ đặt $g_{ij}(x) :\equiv f_i(x) + f_j(x)$ và gọi t_{ij} là nghiệm thực duy nhất của phương trình $g_{ij}(x) = 0,$ ta có $g_{ij}(x) \equiv 2(x - t_{ij})^2.$ Xét tổng $g(x) :\equiv \sum_{i=1}^{4} f_i(x),$ ta thấy:

$$2(x-t_{13})^2 + 2(x-t_{24})^2 \equiv g_{13}(x) + g_{24}(x) \equiv g(x) \equiv g_{14}(x) + g_{23}(x) \equiv 2(x-t_{14})^2 + 2(x-t_{23})^2.$$

Cân bằng hệ số hai vế ta cũng đi đến hệ (1)-(2) và tìm ra mâu thuẫn như đã thấy trong Cách 1.

Cách 3 (dựa trên ý tưởng của *Nguyễn Thế Minh*, giáo viên trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương): Theo giả thiết, với mọi cặp chỉ số $1 \le i < j \le n,$ phương trình bậc hai

$$f_i(x) + f_j(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (b_i + b_j)x + c_i + c_j = 0$$

có nghiệm kép, nên có biệt thức $\Delta_{ij} = 0,$ suy ra $(b_i + b_j)^2 = 8(c_i + c_j).$ Từ đó,

$$\begin{aligned}
&(b_1+b_2)^2 + (b_3+b_4)^2 = 8(c_1+c_2+c_3+c_4) = 8(c_1+c_3+c_2+c_4) = (b_1+b_3)^2 + (b_2+b_4)^2 \\
&\Rightarrow (b_1+b_2)^2 - (b_1+b_3)^2 = (b_2+b_4)^2 - (b_3+b_4)^2 \\
&\Rightarrow (b_2-b_3)(2b_1+b_2+b_3) = (b_2-b_3)(b_2+b_3+2b_4) \\
&\Rightarrow (b_2-b_3)(b_1-b_4) = 0.
\end{aligned}$$

Vậy, $b_2 = b_3$ hoặc $b_1 = b_4$. Nếu $b_2 = b_3,$ thì $8(c_1+c_2) = (b_1+b_2)^2 = (b_1+b_3)^2 = 8(c_1+c_3) \Rightarrow c_2 = c_3$ nên $f_2(x) \equiv f_3(x),$ mâu thuẫn với giả thiết! Còn nếu $b_1 = b_4,$ thì ta lại có $8(c_1+c_2) = (b_1+b_2)^2 = (b_2+b_4)^2 = 8(c_2+c_4) \Rightarrow c_1 = c_4$ nên $f_1(x) \equiv f_4(x),$ cũng mâu thuẫn!

Cách 4 (dựa trên ý tưởng của *Nguyễn Văn Phương*, giáo viên trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh): Theo giả thiết, với mọi cặp chỉ số $1 \le i < j \le n,$ phương trình bậc hai

$$f_i(x) + f_j(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (b_i + b_j)x + c_i + c_j = 0$$

có nghiệm kép, nên có biệt thức $\Delta_{ij} = 0,$ suy ra $(b_i + b_j)^2 = 8(c_i + c_j).$ Từ đó, nếu $n \ge 3,$ ta thấy: với mỗi chỉ số $3 \le j \le n,$ bộ $(x; y) = (b_j; c_j)$ phải là một nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (b_1 + x)^2 = 8(c_1 + y) \\ (b_2 + x)^2 = 8(c_2 + y). \end{cases} \tag{3}$$

Nếu $b_1 = b_2$ và hệ (3) có nghiệm thì $c_1 = c_2$; suy ra $f_1(x) \equiv f_2(x)$, mâu thuẫn với giả thiết! Nếu $b_1 \neq b_2$, bằng cách trừ vế theo vế các phương trình trong hệ, ta thấy được hệ (3) có duy nhất nghiệm

$$\begin{cases} x = 4\dfrac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2} - \dfrac{b_1 + b_2}{2} \\ y = \dfrac{(b_1 + x)^2}{8} - c_1. \end{cases}$$

Vậy, $n \leq 3.$ Suy ra điều phải chứng minh.

<u>Bài toán 7</u> (Saudi Arabia TST 2017). Đa thức $P \in \mathbb{Z}[x]$ được gọi là *có biểu diễn lập phương* nếu nó có dạng $P(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(P_i(x)\right)^3,$ với $m \in \mathbb{N}^*,$ $(\alpha_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{Z},$ $(P_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{Z}[x]$ (phụ thuộc vào P). Tính số tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có biểu diễn lập phương, với các hệ số a, b, c được lấy từ tập $S = \{1;\, 2;\, 3;\, \ldots;\, 2017\}$ (tập gồm 2017 số nguyên dương đầu tiên).

Lời giải. Cho $P(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} c_i x^i,$ với $n \in \mathbb{N},$ $(c_i)_{i=0}^n \subset \mathbb{Z}.$ Ta nói đa thức P là *đẹp* nếu cả hai điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) với mọi chỉ số $0 \leq i \leq n,$ nếu $i \not\vdots\, 3$ thì $c_i \,\vdots\, 3$

(ii) $\sum\limits_{\substack{i \not\vdots\, 3 \\ (0 \leq i \leq n)}} c_i \,\vdots\, 6.$

Nhận xét 1: Mọi đa thức có biểu diễn lập phương thì đẹp.

Chứng minh: Trước hết, dễ thấy:

- nếu P_1 và P_2 là các đa thức đẹp thì đa thức $P_1 + P_2$ cũng đẹp,
- nếu P là một đa thức đẹp và α là một số nguyên thì đa thức αP cũng đẹp.

Vì thế, từ định nghĩa của đa thức có biểu diễn lập phương, để suy ra Nhận xét 1 ta chỉ còn phải chứng minh rằng đa thức P là đẹp nếu nó là lập phương của một đa thức với hệ số nguyên, tức là nếu nó có dạng $P(x) :\equiv Q(x)^3,$ trong đó, $Q \in \mathbb{Z}[x].$ (1)

Giả sử $Q(x) :\equiv \sum_{i=0}^{m} a_i x^i,$ với $m \in \mathbb{N},$ $(a_i)_{i=0}^m \subset \mathbb{Z},$ và $P(x) :\equiv Q(x)^3.$ Áp dụng công thức "đa thức":

$$\left(\sum_{i=0}^{m} \sim_i\right)^N = \sum_{j_0+j_1+\cdots+j_m=N} \frac{N!}{j_0!\,j_1!\cdots j_m!} \sim_0^{j_0} \sim_1^{j_1} \cdots \sim_m^{j_m}$$

(tổng ở vế phải được lấy theo tất cả các bộ số tự nhiên $j_0,\ j_1, \ldots,\ j_m$ có tổng bằng $N,$ và lũy thừa với số mũ 0 luôn được hiểu là bằng 1) với $N := 3,\ \sim_i := a_i x^i\ (0 \le i \le m),$ ta thấy:

$$P(x) = \sum_{i} a_i^3 x^{3i} + \sum_{i \ne k} 3a_i^2 a_k x^{2i+k} + \sum_{\substack{i \ne k \\ i \ne \ell \\ k \ne \ell}} 6a_i a_k a_\ell x^{i+k+\ell}; \tag{2}$$

trong đó, với 3 tổng ở vế phải ta ngầm hiểu các chỉ số $i,\ k,\ \ell$ chạy từ 0 đến $m,$ và đôi một khác nhau. Hơn nữa, với mọi cặp chỉ số $i,\ k$ như thế, ta có:

$$2i + k \not\vdots\ 3 \Leftrightarrow 2k + i \not\vdots\ 3;$$

và $3a_i^2 a_k + 3a_k^2 a_i = 3a_i a_k (a_i + a_k) \vdots 6.$ Vì thế, từ (2) ta thấy đa thức P là đẹp; khẳng định (1) đã được chứng minh.

Nhận xét 2: Mọi đa thức đẹp với bậc bé hơn 3 đều có biểu diễn lập phương.

Chứng minh: Cho P là một đa thức đẹp với $\deg P < 3.$ Khi đó, $P(x) \equiv 3a_2 x^2 + 3a_1 x + a_0$ với $a_0,\ a_1,$ a_2 là các số nguyên mà $a_1 + a_2 \vdots 2\ \ (\Rightarrow a_1 - a_2 \vdots 2).$ Ta dễ dàng kiểm tra trực tiếp:

$$P(x) \equiv \frac{a_1 + a_2}{2}(x+1)^3 + \frac{a_1 - a_2}{2}(x-1)^3 - a_1 x^3 + (a_0 - a_2)1^3, \tag{3}$$

suy ra: P có biểu diễn lập phương.

Trở lại bài toán: xét các tam thức bậc hai $P(x) \equiv ax^2 + bx + c,$ với các hệ số $a,\ b,\ c$ được lấy từ tập $S.$ Theo các Nhận xét 1-2, P có biểu diễn lập phương khi và chỉ khi nó đẹp; tức là,

$$a \vdots 3,\ \ b \vdots 3,\ \ a + b \vdots 6. \tag{4}$$

Tập $T := \{s \in S \mid s \vdots 3\} = \{1 \cdot 3;\ 2 \cdot 3;\ 3 \cdot 3;\ \ldots;\ 672 \cdot 3\}$ gồm 672 số nguyên, trong đó có 336 số chẵn và 336 số lẻ. Điều kiện (4) tương đương với điều kiện: $a \in T,\ \ b \in T,\ \ a$ và b có cùng tính chẵn lẻ. Vậy, để P có biểu diễn lập phương, ta cần và chỉ cần:

- chọn $a \in T$: có đúng 672 cách chọn
- chọn $b \in T$ mà b cùng tính chẵn lẻ với a: có cả thảy 336 cách chọn
- chọn $c \in S$: có đúng 2017 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, có cả thảy $672\times 336\times 2017 = 2\times 336^2\times 2017$ tam thức P có biểu diễn lập phương.

Ghi chú: Ta có thể chứng minh mọi đa thức đẹp đều có biểu diễn lập phương. Nhận xét 2 trong lời giải trên đây chính là bước cơ sở. Ở bước quy nạp, ta cho $2\le n\in\mathbb{N}$ và giả sử mọi đa thức đẹp với bậc bé hơn $3(n-1)$ đều có biểu diễn lập phương. Xét P là một đa thức đẹp bất kỳ mà $\deg P < 3n.$ Ta cần chứng minh rằng P có biểu diễn lập phương. Dưới đây ta đưa ra hai cách chứng minh.

Cách 1: Theo giả thiết, ta có thể viết

$$P(x)\equiv 3a_{3n-1}x^{3n-1}+3a_{3n-2}x^{3n-2}+a_{3(n-1)}x^{3(n-1)}+Q(x); \tag{5}$$

trong đó, $a_{3(n-1)}$, a_{3n-2}, a_{3n-1} là các số nguyên; $Q\in\mathbb{Z}[x]$, $\deg Q < 3(n-1)$; và một trong hai khả năng sau xảy ra:

(i) $a_{3n-2}+a_{3n-1}$ chẵn, đa thức Q đẹp

(ii) $a_{3n-2}+a_{3n-1}$ lẻ, đa thức $Q(x)-3x^{3n-4}$ đẹp.

Xét (i). Lúc này, dựa trên biểu diễn (3) của các đa thức đẹp với bậc bé hơn 3, ta có thể viết lại (5) dưới dạng:

$$\begin{aligned}P(x)&\equiv x^{3(n-1)}\left(3a_{3n-1}x^2+3a_{3n-2}x+a_{3(n-1)}\right)+Q(x)\\&\equiv\frac{a_{3n-2}+a_{3n-1}}{2}(x^n+x^{n-1})^3+\frac{a_{3n-2}-a_{3n-1}}{2}(x^n-x^{n-1})^3-a_{3n-2}(x^n)^3+(a_{3(n-1)}-a_{3n-1})(x^{n-1})^3+Q(x).\end{aligned}$$

Từ đây, dùng giả thiết quy nạp ta suy ra P có biểu diễn lập phương.

Xét (ii). Lúc này, gợi ý một phần từ biểu diễn ở (i), ta viết lại (5) dưới dạng:

$$\begin{aligned}P(x)\equiv{}&\frac{a_{3n-2}-1+a_{3n-1}}{2}(x^n+x^{n-1})^3+\frac{a_{3n-2}-1-a_{3n-1}}{2}(x^n-x^{n-1})^3-a_{3n-2}(x^n)^3+(x^n+x^{n-2})^3\\&+(a_{3(n-1)}-a_{3n-1})(x^{n-1})^3-(x^{n-2})^3+\left(Q(x)-3x^{3n-4}\right).\end{aligned}$$

Từ đây, dùng giả thiết quy nạp ta cũng suy ra P có biểu diễn lập phương.

Cách 2: (dựa trên ý tưởng của *Nguyễn Duy Khang*, giáo viên trường THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu, An Giang). Theo giả thiết, ta có thể viết

$$P(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}[3a_{3k-1}x^{3k-1}+3a_{3k-2}x^{3k-2}+a_{3(k-1)}x^{3(k-1)}]; \tag{6}$$

trong đó, $(a_i)_{i=0}^{3n-1} \subset \mathbb{Z},\ \sum_{i \nmid 3} 3a_i \vdots 6,$ tức là $\sum_{i \nmid 3} a_i \vdots 2.$ (7)

Gọi d là phần dư trong phép chia $a_{3n-1} + a_{3n-2}$ cho 2. Do (7), ta có thể viết lại (6) dưới dạng

$$\begin{aligned} P(x) &\equiv [3a_{3n-1}x^{3n-1} + 3(a_{3n-2} - d)x^{3n-2} + a_{3(n-1)}x^{3(n-1)}] + (3dx^{3n-2} - 3dx^{3(n-1)-1}) + Q(x) \\ &\equiv (x^{n-1})^3[3a_{3n-1}x^2 + 3(a_{3n-2} - d)x + a_{3(n-1)}] + d(x^{n-2})^3(3x^4 - 3x^2) + Q(x), \end{aligned} \tag{8}$$

với Q là một đa thức đẹp có bậc bé hơn $3(n-1)$.

Theo giả thiết quy nạp, Q có biểu diễn lập phương. Từ định nghĩa của d, ta thấy đa thức $3a_{3n-1}x^2 + 3(a_{3n-2} - d)x + a_{3(n-1)}$ đẹp, nên theo Nhận xét 2 trong lời giải của Bài toán 7 (bước cơ sở) thì đa thức này có biểu diễn lập phương. Ngoài ra, ta có thể kiểm tra trực tiếp "biểu diễn lập phương": $3x^4 - 3x^2 \equiv (x^2)^3 - (x^2 - 1)^3 - 1^3.$ Cuối cùng, vì tổng và tích của các đa thức có biểu diễn lập phương cũng là các đa thức có biểu diễn lập phương (hãy chứng minh!) nên từ (8) suy ra P có biểu diễn lập phương.

<u>Bài toán 8</u> (American Mathematical Monthly). Với mỗi số tự nhiên n và k $(k \geq 2)$, gọi a_n^k là thặng dư không âm bé nhất $(\operatorname{mod} k)$ của C_{2n}^n; tức là, $a_n^k \in \mathbb{Z} \cap [0; k)$ và $\mathrm{C}_{2n}^n \equiv a_n^k \pmod{k}$. Tìm tất cả các số tự nhiên $k \geq 2$ để dãy số $(a_n^k)_{n=0}^{\infty}$ *có đuôi tuần hoàn*; tức là,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists T \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ a_{n+T}^k = a_n^k$$

(nói cách khác, dãy số $(a_n^k)_{n=n_0}^{\infty}$ tuần hoàn khi n_0 lớn; ta cũng nói dãy số $(\mathrm{C}_{2n}^n)_{n=0}^{\infty}$ có đuôi tuần hoàn $(\operatorname{mod} k)$).

Lời giải 1 (của *Nguyễn Cảnh Hoàng* và *Phạm Nam Khánh* – thành viên đội tuyển Việt Nam dự thi IMO2017). Dễ thấy $\mathrm{C}_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n!n!} = 2\dfrac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = 2\mathrm{C}_{2n-1}^n \equiv 0 \pmod{2}\ \forall n \geq 1.$ Suy ra: $k = 2$ là một số tự nhiên thỏa yêu cầu đề bài.

Ta sẽ chứng minh rằng mọi số tự nhiên $k \geq 3$ đều không thỏa yêu cầu đề bài. Thật vậy, vì $k \geq 3$ nên phải xảy ra một trong hai trường hợp sau:

(i) $4 \mid k$

(ii) $p \mid k$ với p là một số nguyên tố lẻ nào đó.

Ta sẽ dùng bổ đề sau đây (và một hệ quả hiển nhiên của nó):

Bổ đề: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $[2x] = \begin{cases} 2[x] & \text{khi } (0 \le)\{x\} < 1/2 \\ 2[x]+1 & \text{khi } 1/2 \le \{x\}\ (<1). \end{cases}$

Chứng minh: dễ!

Hệ quả: $\forall x \in \mathbb{R}, [2x] \ge 2[x].$

Trở lại bài toán, trước tiên với trường hợp (i).

1. Với mỗi $m \in \mathbb{N}^*,$ xét các số tự nhiên n thỏa $2^m < n < 2^{m+1}.$ Khi đó, $2^{m+1} < 2n < 2^{m+2}$ và

$$^{3}{}_{2}(\mathrm{C}_{2n}^{n}) = \sum_{k=1}^{m+1}\left(\left[\frac{2n}{2^k}\right] - 2\left[\frac{n}{2^k}\right]\right). \tag{1}$$

Tiếp theo, ta viết $n = 2^t s$ với $t := {}^{3}{}_{2}(n) \in \mathbb{N},$ $s \in \mathbb{N}^*,$ s lẻ, $s \ge 3$ (vì n không phải là một lũy thừa đúng của 2). Do $\frac{n}{2^t} = s \ge 3 > 2 > \frac{n}{2^m}$ ta thấy $t < m.$ Theo Hệ quả ở trên, từ (1) ta có:

$$\begin{aligned} ^{3}{}_{2}(\mathrm{C}_{2n}^{n}) &\ge \left(\left[\frac{2n}{2^{t+1}}\right] - 2\left[\frac{n}{2^{t+1}}\right]\right) + \left(\left[\frac{2n}{2^{m+1}}\right] - 2\left[\frac{n}{2^{m+1}}\right]\right) \\ &= \left(\left[\frac{2n}{2^{t+1}}\right] - 2\left[\frac{n}{2^{t+1}}\right]\right) + (1 - 2\cdot 0) = \left[\frac{2n}{2^{t+1}}\right] - 2\left[\frac{n}{2^{t+1}}\right] + 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Vì s lẻ nên $\left\{\frac{n}{2^{t+1}}\right\} = \left\{\frac{s}{2}\right\} = \frac{1}{2};$ do đó, theo Bổ đề, $\left[\frac{2n}{2^{t+1}}\right] = 2\left[\frac{n}{2^{t+1}}\right] + 1.$ Vậy, (2) kéo theo $^{3}{}_{2}(\mathrm{C}_{2n}^{n}) \ge 2,$ tức là $\mathrm{C}_{2n}^{n} \equiv 0 \pmod 4.$

2. Nếu $n = 2^m$ $(m \in \mathbb{N}^*),$ ta lại có

$$^{3}{}_{2}(\mathrm{C}_{2n}^{n}) = \sum_{k=1}^{m+1}\left(\left[\frac{2n}{2^k}\right] - 2\left[\frac{n}{2^k}\right]\right) = \sum_{k=1}^{m+1} 2^{m+1-k} - 2\sum_{k=1}^{m} 2^{m-k} = 1,$$

nên $\mathrm{C}_{2n}^{n} \not\equiv 0 \pmod 4.$

Vì khoảng cách giữa 2^m và 2^{m+1} có thể lớn tùy ý (khi m lớn), nên các kết quả ở hai bước 1-2 cho thấy dãy số $(\mathrm{C}_{2n}^{n})_{n=0}^{\infty}$ không thể có đuôi tuần hoàn $(\mathrm{mod}\, 4),$ do đó nó cũng không thể có đuôi tuần hoàn $(\mathrm{mod}\, k).$

Trường hợp (ii).

1. Với mỗi $m \in \mathbb{N}^*,$ xét các số tự nhiên n thỏa $\dfrac{p^m}{2} < n < p^m.$ Khi đó, $p^m < 2n < 2p^m < p^{m+1}$ nên dùng Hệ quả ở trên ta có

$$v_p(\mathrm{C}_{2n}^n) = \sum_{k=1}^{m}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) \geq \left[\frac{2n}{p^m}\right] - 2\left[\frac{n}{p^m}\right] = 1 - 2\cdot 0 = 1;$$

tức là $\mathrm{C}_{2n}^n \equiv 0 \pmod p.$

2. Nếu $n = p^m \ (m \in \mathbb{N}^*),$ ta lại có

$$v_p(\mathrm{C}_{2n}^n) = \sum_{k=1}^{m}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\left[2p^{m-k}\right] - 2\left[p^{m-k}\right]\right) = 0,$$

nên $\mathrm{C}_{2n}^n \not\equiv 0 \pmod p.$

Vì khoảng cách giữa $\dfrac{p^m}{2}$ và p^m có thể lớn tùy ý (khi m lớn), nên các kết quả ở hai bước 1-2 cho thấy dãy số $(\mathrm{C}_{2n}^n)_{n=0}^{\infty}$ không thể có đuôi tuần hoàn $(\mathrm{mod}\, p),$ do đó nó cũng không thể có đuôi tuần hoàn $(\mathrm{mod}\, k).$

Lời giải 2. Ta cũng nhận xét $\mathrm{C}_{2n}^n = 2\mathrm{C}_{2n-1}^n \equiv 0 \pmod 2\ \forall n \geq 1.$ Suy ra: $k = 2$ là một số tự nhiên thỏa yêu cầu đề bài. Tiếp theo, ta chứng minh rằng mọi số tự nhiên $k \geq 3$ đều không thỏa yêu cầu đề bài, vẫn theo cách xét một trong hai trường hợp sau:

(i) $4 \mid k$

(ii) $p \mid k$ với p là một số nguyên tố lẻ nào đó.

Trước hết, ta giới thiệu ký hiệu "đồng dư" trên các đa thức với hệ số nguyên: Cho $d \in \mathbb{N}^*$ và $f, g \in \mathbb{Z}[x].$ Nếu mọi hệ số của đa thức $f - g$ đều là bội của $d,$ ta sẽ viết $f \equiv_d g;$ và để cho tiện, đôi khi ta cũng chấp nhận cách viết $f(x) \equiv_d g(x).$ Nếu $f(x) \equiv a \in \mathbb{Z}$ và $g(x) \equiv b \in \mathbb{Z}$ là các đa thức hằng thì "đồng dư thức" $a \equiv_d b$ mới được giới thiệu quy về đồng dư thức $a \equiv b \pmod d$ đã quen biết trên các số nguyên. Quan hệ $"\equiv_d"$ hiển nhiên là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}[x].$ Ta cũng có thể thực hiện các phép toán cộng/trừ/nhân vế theo vế trên các đồng dư thức vừa được giới thiệu, với cùng "môđun" d (việc chứng minh là hoàn toàn dễ dàng).

Trở lại bài toán, đầu tiên là với trường hợp (i).

Với mỗi $m \in \mathbb{N}^*,$ xét các số tự nhiên n có dạng $n = 2^m + r$ với $0 \le r < 2^m.$ Khi đó, $2n = 2^{m+1} + 2r$ nên

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n} &= (1+x)^{2^{m+1}}(1+x)^{2r} = \left((1+x^2)+2x\right)^{2^m}(1+x)^{2r}\\
&= \left((1+x^2)^{2^m} + 2^m(1+x^2)^{2^m-1}(2x) + \sum_{i=2}^{2^m} \mathrm{C}_{2^m}^i (1+x^2)^{2^m-i}(2x)^i\right)(1+x)^{2r}\\
&\equiv_4 (1+x^2)^{2^m}(1+x)^{2r} \equiv_4 (1+x^{2^2})^{2^{m-1}}(1+x)^{2r} \equiv_4 \ldots\\
&\equiv_4 (1+x^{2^m})^2(1+x)^{2r} = (1+2x^{2^m}+x^{2^{m+1}})(1+x)^{2r}.
\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^n ở hai vế của đồng dư thức nói trên, ta suy ra

$$\mathrm{C}_{2n}^n \equiv_4 2\mathrm{C}_{2r}^r \equiv_4 \begin{cases} 2 \not\equiv_4 0 & \text{khi } r = 0\\ 4\mathrm{C}_{2r-1}^r \equiv_4 0 & \text{khi } 1 \le r < 2^m. \end{cases}$$

Vì khoảng cách giữa 2^m và 2^{m+1} có thể lớn tùy ý (khi m lớn), nên kết quả trên cho thấy dãy số $(\mathrm{C}_{2n}^n)_{n=0}^{\infty}$ không thể có đuôi tuần hoàn $(\bmod 4),$ do đó nó cũng không thể có đuôi tuần hoàn $(\bmod k).$

Trường hợp (ii).

Với mỗi $m \in \mathbb{N}^*,$ xét các số tự nhiên n có dạng $n = \dfrac{p^m + r}{2}$ với $0 < r \le p^m,$ r là số nguyên lẻ. Để ý rằng $2n = p^m + r$ và rằng $\mathrm{C}_p^i \,\vdots\, p$ khi $1 \le i \le p-1,$ ta có:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n} &= (1+x)^{p^m}(1+x)^r = \left(1 + x^p + \sum_{i=1}^{p-1} \mathrm{C}_p^i x^i\right)^{p^{m-1}}(1+x)^r\\
&\equiv_p (1+x^p)^{p^{m-1}}(1+x)^r \equiv_p (1+x^{p^2})^{p^{m-2}}(1+x)^r \equiv_p \ldots\\
&\equiv_p (1+x^{p^m})(1+x)^r = \left(\sum_{i<r} a_i x^i\right) + x^r + x^{p^m} + \left(\sum_{i>p^m} a_i x^i\right)
\end{aligned}$$

(a_i là hệ số của x^i trong đa thức $(1+x^{p^m})(1+x)^r$). So sánh hệ số của x^n ở hai vế của đồng dư thức nói trên, ta suy ra

$$\mathrm{C}_{2n}^n \equiv_p \begin{cases} 1+1 = 2 \not\equiv_p 0 & \text{khi } r = p^m \ (\Rightarrow r = n = p^m)\\ 0 & \text{khi } 0 < r < p^m \ (\Rightarrow r < n < p^m). \end{cases}$$

Vì khoảng cách giữa $\frac{p^m}{2}$ và p^m có thể lớn tùy ý (khi m lớn), nên kết quả trên cho thấy dãy số $(\mathrm{C}_{2n}^n)_{n=0}^{\infty}$ không thể có đuôi tuần hoàn $(\bmod p)$, và do đó nó cũng không thể có đuôi tuần hoàn $(\bmod k)$.

Vậy, $k=2$ là số tự nhiên duy nhất thỏa yêu cầu đề bài.